



INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
Centro de Estudios Científicos y Tecnológicos No. 19
“Leona Vicario”
ACADEMIA DE MATEMÁTICAS
TURNO MATUTINO



Guía de estudio para Geometría y Trigonometría

Parcial 1

Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Ejercicio 1. Aplica las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas para resolver las siguientes expresiones

a) $\frac{2^{-2}3^7a^{15}}{2^{18}a^{10}}$

b) $\frac{x^5w^{1/3}}{wx^3x^2}$

c) $\sqrt[5]{a b c^{10}}$

d) $\sqrt[6]{(2xy)^3}$

e) $z(3zx)^3(x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{4}}\sqrt{z^4}$

f) $\log \sqrt[5]{(xyz)(x)^{10}}$

g) $\log \frac{(ab\sqrt{c})^4}{\sqrt[3]{w^5}}$

h) $\log 10xy\sqrt{x}$

i) $\log \sqrt[3]{\frac{2wx^2}{w^4}}$

j) $\log \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{(bc)^8}}$

Ejercicio 2. Calcular el valor numérico de

a) $\log_5 \frac{2^3}{8\sqrt{3^2}}$

b) $\log_3 10^3 + \log_3 10^2 - \log_3 10^4$

c) $\log_2 4 - \log_2 \sqrt{36} + \log_2 12$

d) $(\frac{1}{4})^{1/2}(\frac{1}{4})^{3/2}$

e) $(\frac{2}{3})^{1+\log_2 2}$

f) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{243}$

g) $\log 15 + \log 18 - \log 10$

h) $\frac{\log_3 8}{\log_3 16}$

i) $\frac{\log_5 125}{\log_3 27}$

j) $\log_3 \sqrt[3]{\sqrt{3}}$

Ejercicio 3. Genera las gráficas de las siguientes funciones exponenciales y logarítmicas

a) $f(x) = 3^{x+1}$

b) $f(x) = 1 + e^{1-x}$

c) $f(x) = (3 + e)^x$

d) $y = \log(\frac{x}{2})^3$

e) $y = 3 + \log x$

Ejercicio 4. Resuelve las siguientes ecuaciones

a) $2^{2x} = 2^{4\sqrt{3}}$

b) $2(4^x) = 64$

c) $3^{x^2+x-12} = 1$

d) $10^x = \sqrt[3]{100}$

e) $3^{x+3} + 3^x = 7^{x+1} + 5(7^x)$

f) $2^{x+3} = 32$

g) $(\frac{1}{4})^{x^2-2x-2} = \frac{1}{4}$

h) $(1.5)^{2x+2} = (\frac{2}{3})^{-x}$

i) $2^{x+1} + 2^x = 12$

j) $18^{x^2-5x-6} = 1$

k) $2^x + (5)(2)^{x+1} = 11$

l) $(\frac{1}{e})^{-2x} = e^{x^2-3}$

m) $\log_2 32 = x + 3$

- n) $\log_2 x^7 - \log_2 x^6 = 3$
- o) $\log_2(x + 2) = 4$
- p) $\log_3 81 = 2x$
- q) $\log 1000 = x - 4$
- r) $\log_5 x - \log_5 7 = 2$
- s) $\log_2(x - 1) = 3$
- t) $\log_4 \log_3 \log_2(x) = 0$
- u) $\log_5 x = 2\log_5 3$
- v) $\log_3 x^2 - \log_3 \frac{x}{x-6} = 3$
- w) $\frac{1}{2} \log_{x+4}(-2x + 16) = 1$
- x) $\log_{x-1}(2x - 7) = 1$
- y) $x^{2+\log x} = 10x^2$

Ejercicio 5. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones

a)
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ 2^x + 2^y = 32 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \log_3 x - \log_3 y = 2 \\ 3^x - 3^y = 18 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 4^x + 5^y = 21 \\ 5^x + 4^y = 29 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2^{x-y} = 8 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} xy = 40 \\ x^{\log y} = 4 \end{cases}$$

Ejercicio 6. Resuelve los siguientes ejercicios de aplicaciones

1. Suponiendo que una bacteria de cólera se reproduce según la siguiente fórmula $B = 500(4^{2t})$ donde t=tiempo en horas y B= número de bacterias
 - a) Calcula cuál será el tiempo necesario para obtener una población de 15200 bacterias
 - b) ¿Cuántas bacterias habrá tras haber transcurrido 2.6 horas?

- La población de una ciudad se duplica cada 10 años. Si en el año 2020 había 100,000 habitantes, ¿cuántos habitantes habrá en el año 2040? Considere que el problema obedece a una función exponencial creciente del tipo $P(t) = P_0(1 + r)^t$, considerando que P_0 es la población inicial, r es la tasa de crecimiento y t el tiempo transcurrido en años.
- La presión atmosférica con respecto a la altura se puede modelar utilizando la ecuación barométrica, que es una aproximación de la ley de Laplace. La ecuación barométrica es:

$$P(h) = P_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}$$

Donde:

$P(h)$ es la presión atmosférica a una altura h

P_0 es la presión atmosférica al nivel del mar (760 Torr)

M es la masa molar del aire (aproximadamente 0.029 kg/mol)

g es la aceleración debido a la gravedad (aproximadamente 9.81 m/s²)

R es la constante de los gases ideales (aproximadamente 8.314 J/(mol·K))

T es la temperatura en kelvin de la altura estudiada

Esta ecuación muestra que la presión atmosférica disminuye exponencialmente con la altura. A medida que la altura aumenta, la presión atmosférica disminuye. Calcular la presión atmosférica en la a) Ciudad de México, b) Oaxaca centro y en c) Acapulco.

- El valor del modelo de un auto decrece en valor a una tasa continua de 8% por año. Si es que un auto cuesta \$200 000 cuando es nuevo, ¿cuál será su valor después de 5 años? Considere un decrecimiento continuo del tipo $V(t) = V_0 e^{-kt}$.
- La fórmula para el interés compuesto es

$$A = C \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

en donde A representa la cantidad de dinero después de un periodo de tiempo, C representa la cantidad inicial de dinero, r representa la tasa de interés escrita en decimal, n es el número de veces que el interés es compuesto en un año y t es la cantidad de tiempo en años. Imagina que inviertes 1000 dólares en una cuenta de ahorros. La tasa promedio de interés es 5% y es compuesta 4 veces al año. ¿Cuánto dinero habrá en la cuenta de ahorros después de 10 años?

Parcial 2

Medida de ángulos

Ejercicio 0. Dibuja cada uno de los siguientes ángulos con ayuda de un transportador.

- a) 38°
- b) 77°
- c) 135°
- d) $50^\circ 30' 52''$
- e) $275^\circ 40' 30''$
- f) 290°
- g) $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$
- h) $\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$
- i) $\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$
- j) 15°

Ejercicio 1. Rellena las celdas que faltan en la tabla realizando la conversión de ángulos según corresponda.

Sistema sexagesimal	Sistema decimal	Sistema Radian
$125^\circ 40' 30''$		
		$\frac{2}{3}\pi$
	270°	
		$\frac{\pi}{12}$
$300^\circ 30' 0''$		
	60°	
		$\frac{5}{10}\pi$
	220°	

Ejercicio 2. Completa la siguiente tabla con los ángulos complementarios, suplementarios y conjugados en sistema decimal.

Ángulo	Complementario	Suplementario	Conjugado
15°			
$89^\circ 30' 0''$			
44.5°			
$\frac{\pi}{4}$			

$\frac{3\pi}{9}$			
90°0'0"			

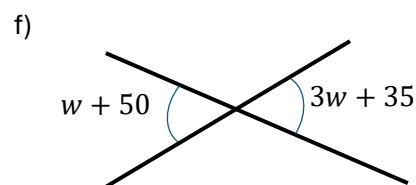
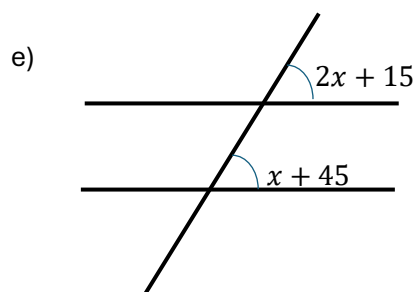
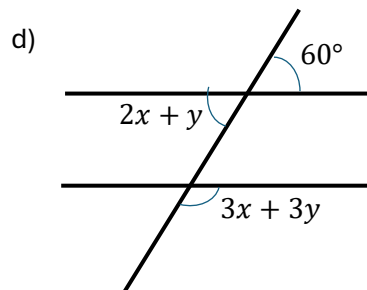
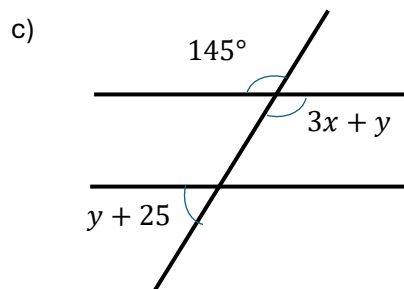
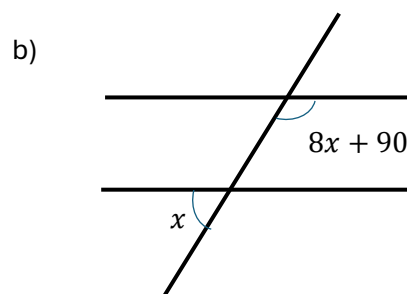
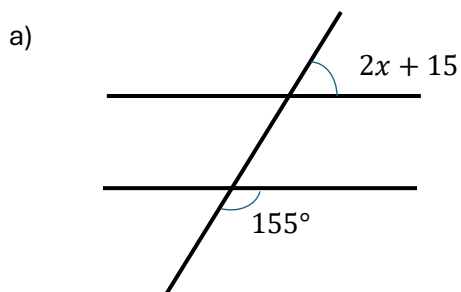
Ejercicio 3. Encontrar dos ángulos complementarios tal que uno es el doble del otro.

Ejercicio 4. Determinar dos ángulos suplementarios, uno es 30° mayor que el doble del otro.

Ejercicio 5. Hallar dos ángulos complementarios que su diferencia sea 20°.

Rectas paralelas cortadas por una secante

Ejercicio 6. Encontrar las variables solicitada en cada caso.



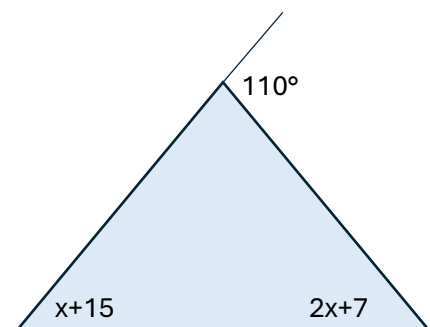
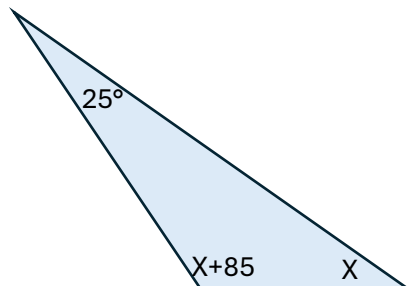
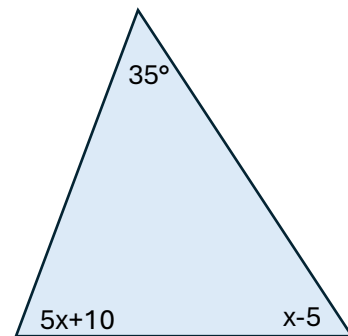
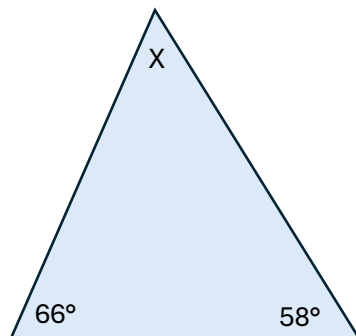
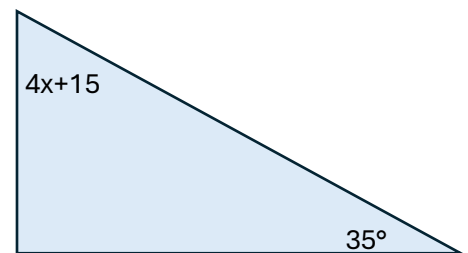
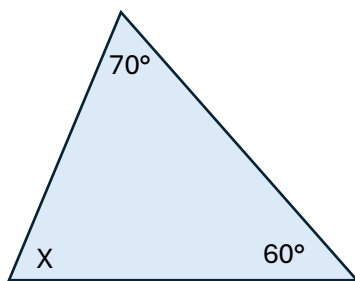
Triángulos**Ángulos de un triángulo**

Ejercicio 7. ¿Cuánto miden los ángulos internos y externos de un triángulo equilátero?

Ejercicio 8. Si un ángulo agudo de un triángulo rectángulo mide 54° , ¿Cuánto mide el otro?

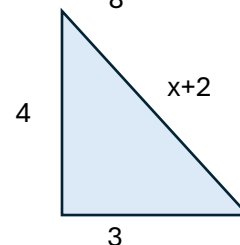
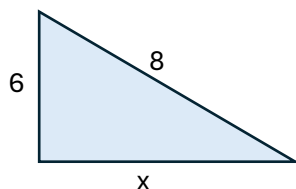
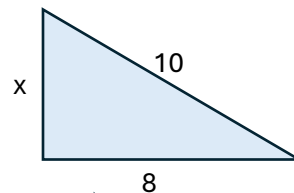
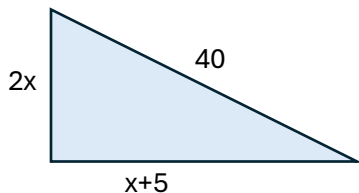
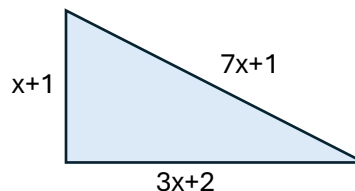
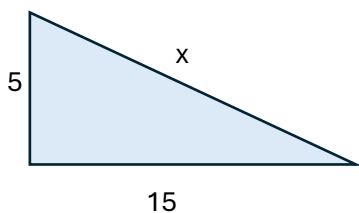
Ejercicio 9. En un triángulo rectángulo uno de sus ángulos agudos mide $38^\circ 45' 30''$. Encontrar el valor del otro ángulo.

Ejercicio 10. Encontrar el valor de x en los siguientes triángulos.



Teorema de Pitágoras

Ejercicio 11. Encontrar el valor de x , cateto o hipotenusa faltante en los siguientes triángulos.

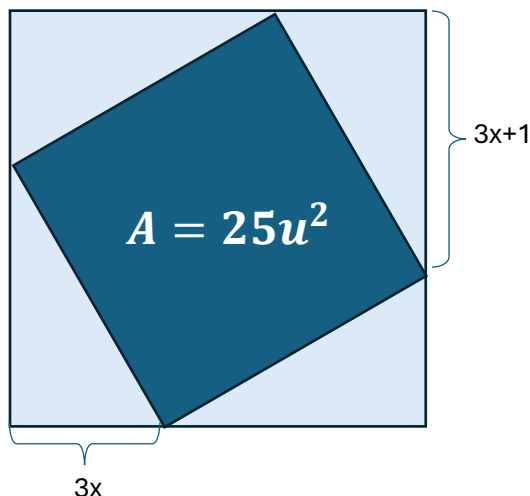


Ejercicio 12. Si en un triángulo rectángulo sus catetos miden 4 y 5, ¿Cuánto mide su hipotenusa?

Ejercicio 13. Si colocamos una escalera de 4m a una distancia de 1m de separación de una casa, ¿a qué altura podríamos escalar?

Ejercicio 14. La medida que se utiliza en las televisiones es la longitud de la diagonal de la pantalla en unidades de pulgadas (una pulgada equivale a 2,54 centímetros). Si Luis desea comprar una televisión para colocarlo en un hueco de 96x79cm, ¿de cuántas pulgadas de diagonal debe ser el televisor?

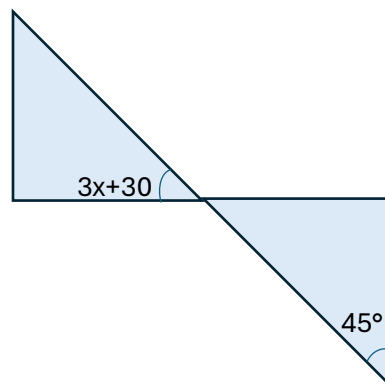
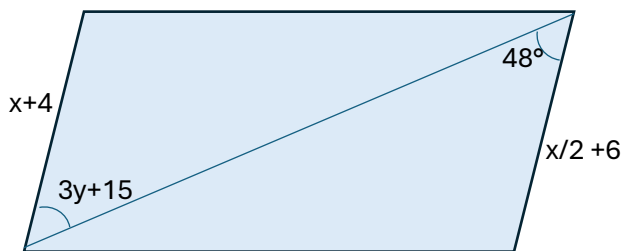
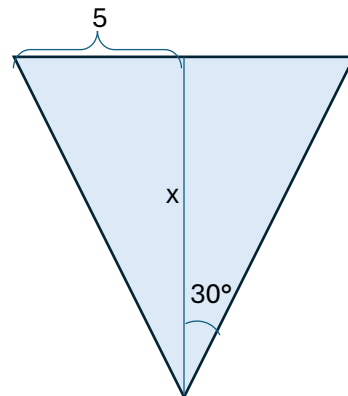
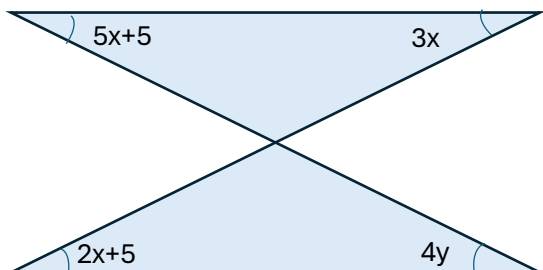
Ejercicio 15. Calcular la medida uno de los lados del cuadrado exterior con los datos que se brindan. Además, considere que el área del cuadrado interior es $25u^2$.



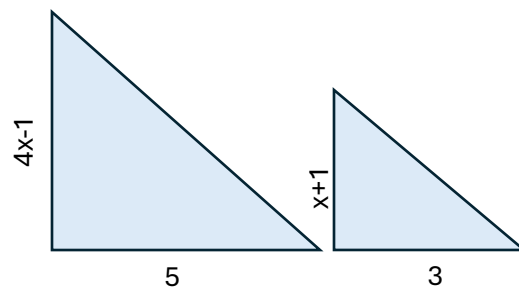
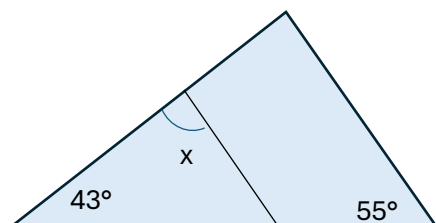
Semejanza, congruencia y Teorema de Thales

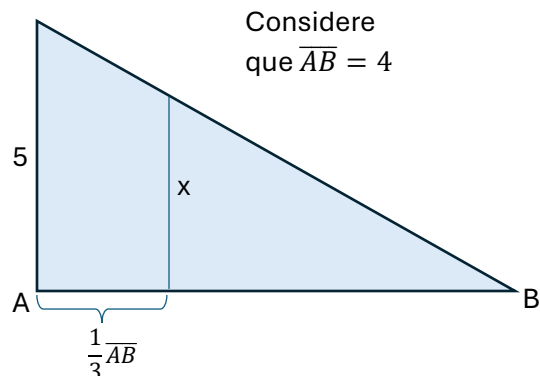
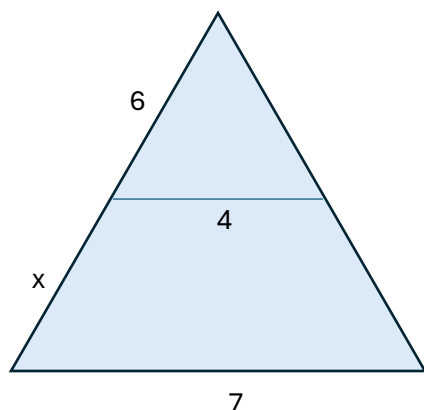
Ejercicio 16. Encontrar los valores de las incógnitas para cada caso.

- a) Si los siguientes triángulos son congruentes entre sí calcular los valores de x y y .



Ejercicio 17. Determina el ángulo x de los siguientes triángulos semejantes.





Polígonos

Ejercicio 18. ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores es 1260° ? Demuestre su respuesta.

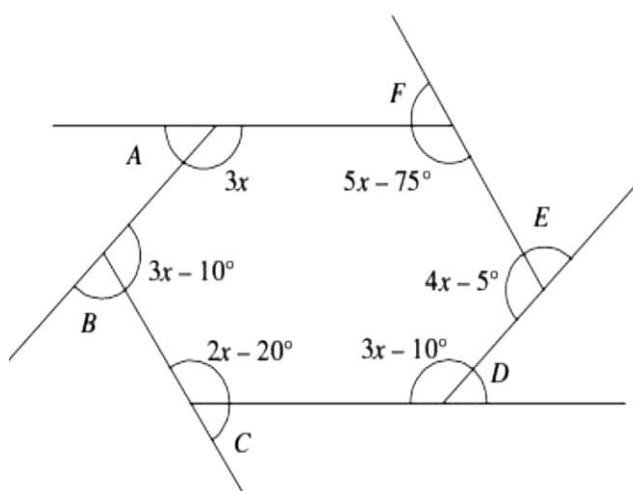
Ejercicio 19. ¿Cuántas diagonales tiene un decágono? Demuestre su respuesta.

Ejercicio 20. ¿Cuál es el polígono regular cuyo ángulo exterior mide $\pi/6$ rad? Demuestre su respuesta.

Ejercicio 21. ¿A que polígono se le puede trazar 54 diagonales en total? Demuestre su respuesta.

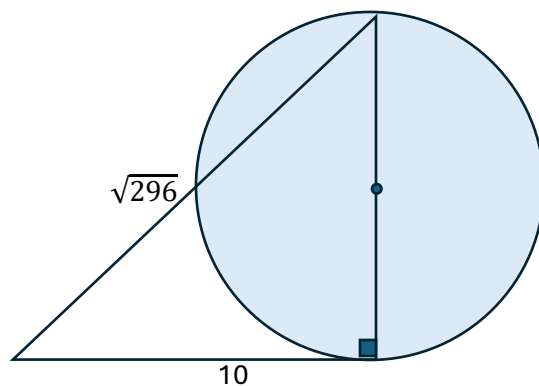
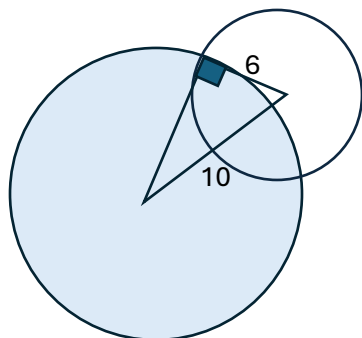
Ejercicio 22. ¿Cuál es el polígono cuya suma de ángulos interiores es 720° ? Demuestre su respuesta.

Ejercicio 23. Determina los ángulos exteriores del siguiente polígono.

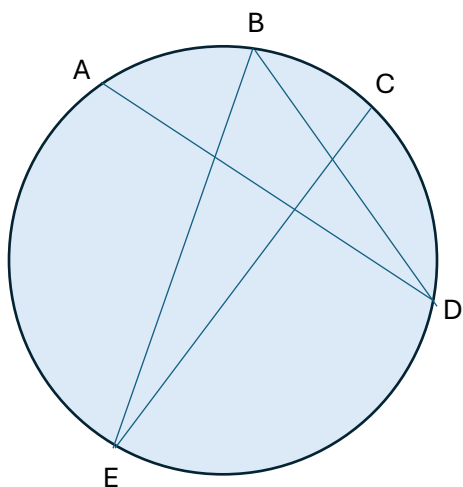


Circunferencia

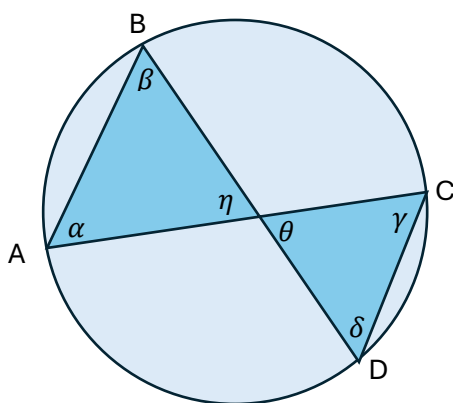
Ejercicio 24. Encuentra la medida de los radios de las siguientes circunferencias.



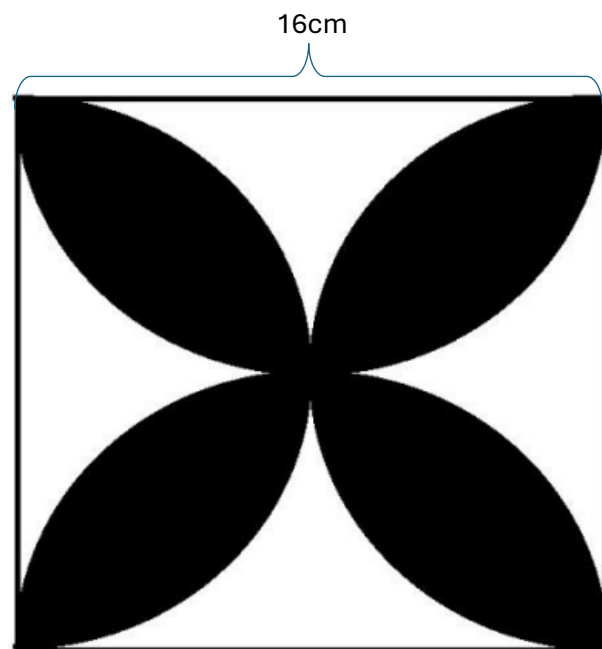
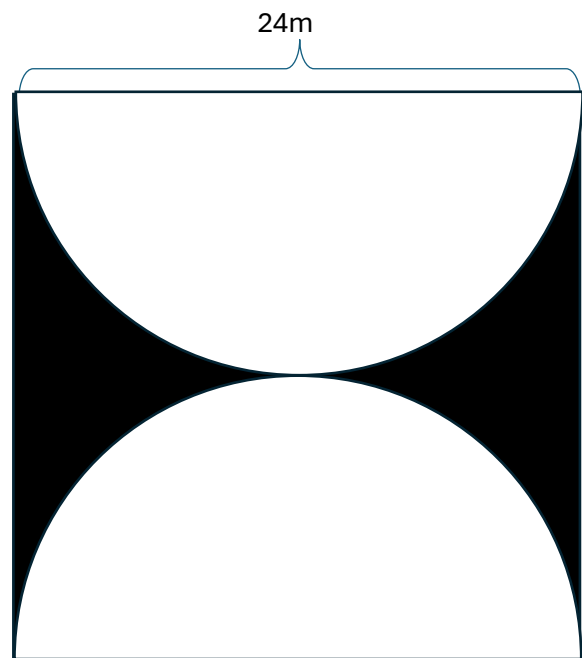
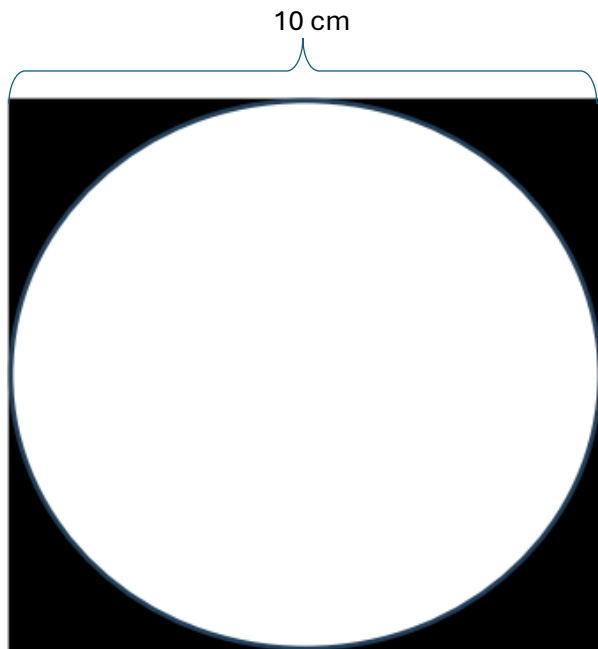
Ejercicio 25. Si el arco $\widehat{AB} = 20^\circ$, el arco $\widehat{CD} = 40^\circ$ y $\widehat{AD} = 120^\circ$. Calcular el ángulo $\angle BEC$.



Ejercicio 26. Si el arco $\widehat{BC} = 120^\circ$ y el arco $\widehat{AD} = 140^\circ$. Calcular los ángulos marcados con las letras griegas.



Ejercicio 27. Calcula el área de las siguientes figuras sombreadas.



Parcial 3

Identidades y ecuaciones trigonométricas

Ejercicio 1. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

- a) $\operatorname{sen}(x) = \frac{\cos(x)}{\cot(x)}$
- b) $\operatorname{sen}\beta + \cos\beta \cot\beta = \csc\beta$
- c) $\frac{\csc(\alpha)}{\tan(\alpha) + \cot(\alpha)} = \cos(\alpha)$
- d) $\frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$
- e) $2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$
- f) $\frac{\cos^2 \beta - \operatorname{sen}^2 \beta}{1 + 2\operatorname{sen}\beta \cos\beta} = \frac{1 - \tan\beta}{1 + \tan\beta}$
- g) $\frac{\cot x}{\cos x} = \csc x$
- h) $\sec\beta \operatorname{sen}\beta \cot\beta = 1$
- i) $\frac{1 + \cos 2x}{\cot x} = \sin 2x$

Ejercicio 2. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

- a) $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
- b) $\cos x + 2 \sin x = 2$
- c) $\csc x = \sec x$
- d) $4\cos^2 x = 3 - 4\cos x$
- e) $\cos x + 9\operatorname{sen}^2 x = 3$
- f) $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$
- g) $\cos x - \sqrt{3} \operatorname{sen} x = 0$
- h) $2\operatorname{sen} x + \csc x = 3$
- i) $\tan^4 x - 8 \tan x = 0$
- j) $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$
- k) $\frac{1}{\cot^2 x} + \sqrt{3} \tan x = 0$

Triángulos rectángulos

Ejercicio 3. Resuelve los siguientes triángulos rectángulos usando identidades trigonométricas para calcular todos sus lados y todos sus ángulos.

- a) $A = 12$ $B = 17$
- b) $\alpha = 32$ $B = 4$
- c) $\alpha = 54$ $B = 22$
- d) $B = \sqrt{16}$ $A = 2$
- e) $A = 7.5$ $C = 2.5$
- f) $A = 18$ $B = 19$
- g) $\alpha = 48$ $B = 35$
- h) $\gamma = 34$ $C = 57$

Ejercicio 4. Resuelve los siguientes ejercicios de aplicación.

- a) Un piloto de un barco observa al vigía de un faro con un ángulo de elevación de 32° . Si la altura del faro es de 135m, calcular la distancia del faro al barco.
- b) Una persona de 1.2 m de estatura observa la parte mas alta de un árbol con un ángulo de elevación de 50° . ¿Cuánto mide el árbol si esta a 6 m de él?
- c) Desde el borde de un acantilado de 500 m, de altura sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de dos botes situados en un mismo plano, miden 45° y 30° . ¿Cuál es la distancia entre los botes?
- d) Una persona cuyos ojos están a 1.2 m del suelo, observa una pintura que se encuentra a 1 m del suelo y mide 1.5 m. Dicha persona se encuentra a 2 m de distancia de la pintura. ¿Cuál es el ángulo de visión?
- e) En la construcción de una carretera se encuentra una montaña de 250 m de altura, a través de ella se construirá un túnel. La punta de la montaña se observa bajo un ángulo de 45° desde un punto P en un extremo de la montaña, y bajo un ángulo de 30° desde l otro extremo. ¿Cuál será la longitud del túnel?

Triángulos oblicuángulos

Ejercicio 5. Resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos usando identidades trigonométricas para calcular todos sus lados, todos sus ángulos, su perímetro y área (formula de Herón).

- a) $\beta = 58$ $\gamma = 44$ $B = 18$
- b) $\alpha = 50$ $\gamma = 54$ $A = 72$
- c) $A = 5$ $\alpha = 32$ $B = 8$
- d) $A = 15$ $B = 16$ $C = 26$
- e) $A = 32$ $B = 49$ $\gamma = 30$
- f) $B = 45$ $C = 75$ $\gamma = 35$
- g) $\beta = 29$ $\gamma = 84$ $B = 12.3$

Ejercicio 4. Resuelve los siguientes ejercicios de aplicación.

- a) La distancia entre dos puntos A y B es de 20 Km. Los ángulos de elevación de un globo con respecto a dichos puntos son de 60° y 50° . ¿A qué altura del suelo se encuentra?
- b) Se inscribe un octágono regular de lado 1cm en una circunferencia, calcula el área del círculo.
- c) ¿Cuál es la longitud de los lados de un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm?
- d) El horario y el minuterio de un reloj miden 0.8 y 1.2, respectivamente. Determina la distancia entre los extremos de las manecillas cuando son las 4:00.
- e) Dos personas en un mismo plano horizontal se encuentran separados 1200 m y observan un avión con un ángulo de elevación de 30° y 55° , respectivamente. ¿Cuál es la altura del avión en ese momento?